

## Квадратна функција<sup>1</sup>

**Дефиниција 1:** Реална функција облика  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  назива се квадратна функција.

**Примедба:** Квадратна функција је специјални облик степене функције  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Видели смо да је за  $n$  паран број, график функције парабола, па тако и за  $n = 2$ . Могли смо приметити да параметри  $a, b$  и  $c$  имају одређене улоге у одређивању положаја и облика параболе координатном систему, али да је график, у суштини, парабола. Параметар  $a$  својим знаком одређује како ће бити усмерена парабола; за  $a > 0$  теме ће бити облика  $\cup$ , док за  $a < 0$  теме ће бити облика  $\cap$ . Затим, што је вредност  $a$  већа од 1, парабола ће бити "издуженија" дуж  $Y$ -осе, и обрнуто, што је вредност  $a$  мања од 1; тј. ближа нули него један, парабола ће бити "збијенија" дуж  $Y$ -осе. Параметар  $b$  уз  $x$ , као и сам сабирак  $bx$  утиче на положај параболе дуж  $X$ -осе, а параметар  $c$  утиче на положај параболе дуж  $Y$ -осе.

**анализа:**

За прецизније скицирање параболе, потребни су нам неки значајни подаци, а то су: нуле функције (уколико постоје), орјентација темена и његове координате, и пресечна тачка параболе са  $Y$ -осом.

- **нуле функције:**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ; као што нам је познато, природа решења квадратне једначине одређена је знаком дискриминанте  $\tilde{D} = b^2 - 4ac$ .

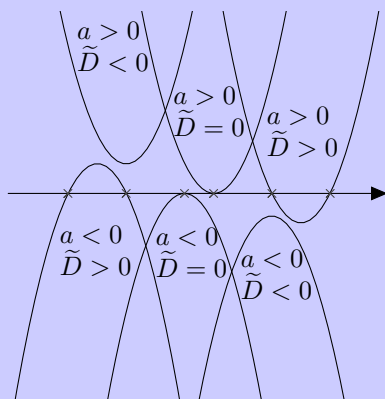
- (i) Ако је  $b^2 - 4ac > 0$ , онда  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  и  $x_1 \neq x_2$  (јесу две различите нуле функције - то су пресечне тачке параболе са  $x$ -осом);
- (ii) Ако је  $b^2 - 4ac = 0$ , онда  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  и  $x_1 = x_2$  (јесу једна нула функције - то је додирна тачка темена параболе са  $x$ -осом);
- (iii) Ако је  $b^2 - 4ac < 0$ , онда  $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$  (функција нема нуле - парабола нема заједничких тачака са  $x$ -осом - или је цела изнад  $X$ -осе или је цела испод  $X$ -осе);

- **екстремне вредности функције;** То су вредности независно променљиве  $x \in \mathbb{R}$  за коју је вредност функције минимална (максимална). Положај темена параболе описује нам о каквој екстремној вредности је реч (ако је теме параболе "окренуто према доле") слика облика  $\cup$ , онда теме параболе у тој тачки описује минималну вредност функције, а ако је теме параболе "окренуто према горе", слика облика  $\cap$ , онда теме параболе описује максималну вредност функције.

Формулу  $f(x) = ax^2 + bx + c$  преведемо у канонски облик:

$$\begin{aligned} &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

- (i) За  $a > 0$ , први сабирак је увек позитиван, а други је константан; онда последњи израз има најмању вредност када је први сабирак нула тј. за  $x = -\frac{b}{2a}$  која је  $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$
- (ii) За  $a < 0$ , први сабирак увек је негативан, а други је константан; онда последњи израз има највећу вредност када је први сабирак нула, тј. за  $x = -\frac{b}{2a}$  која је  $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ . Графички гледано, екстремна вредност представља положај темена параболе у координатном систему, тако да су координате темена  $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ .



Слика показује све могуће положаје темена параболе (графика квадратне функције) у односу на  $X$ -осу. Уз сваки појединачни случај наведен је услов под којим је приказан график.

- **знак функције;** Вредности независно променљиве  $x \in \mathbb{R}$  за коју је вредност функције позитивна обележава се као скуп  $A^+ = \{x \mid y > 0\}$  а за коју је негативна  $A^- = \{x \mid y < 0\}$ .

Пошто смо анализирали нуле квадратне функције и екстремну вредност, онда смо у могућности да скицирамо параболу у координатном систему, и на основу њеног положаја прочитамо знак функције. Тако ћемо имати следеће могуће одговоре; ако смо установили да је:

- (i)  $a > 0$  и  $\tilde{D} < 0$  у том случају цела параболола је изнад  $X$ -осе, па је  $A^+ = \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $a < 0$  и  $\tilde{D} < 0$  у том случају цела параболола је испод  $X$ -осе, па је  $A^- = \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $a > 0$  и  $\tilde{D} = 0$  у том случају параболола додирује  $X$ -осу, па је  $A^+ = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ; при чему је  $x_0$  једна нула функције,
- (iv)  $a < 0$  и  $\tilde{D} = 0$  у том случају параболола додирује  $X$ -осу, па је  $A^- = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ; при чему је  $x_0$  једна нула функције,
- (v)  $a > 0$  и  $\tilde{D} > 0$  у том случају параболола сече  $X$ -осу у нулама  $x_1$  и  $x_2$ . онда је  $A^+ = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ , а  $A^- = (x_1, x_2)$ , и последња могућа ситуација је,
- (vi)  $a < 0$  и  $\tilde{D} > 0$  у том случају параболола сече  $X$ -осу у нулама  $x_1$  и  $x_2$ . онда је  $A^- = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ , а  $A^+ = (x_1, x_2)$ .

- **монотоност функције;** (раст и опадање вредности функције)

Посматрањем функције у канонском облику  $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ , пошто смо установили типове екстремних вредности, можемо закључити следеће:

- за  $a > 0$ ; пошто функција достиже екстремну вредност минимума за  $x = -\frac{b}{2a}$ , онда ће се њена монотоност испољавати (гледано с лева на десно по  $X$ -оси) тако да ће за  $x < -\frac{b}{2a}$  функција опадати  $f \searrow$ , а за  $x > -\frac{b}{2a}$  функција ће расти тј.  $f \nearrow$ ;
- за  $a < 0$ ; пошто функција достиже екстремну вредност максимума за  $x = -\frac{b}{2a}$ , онда ће се њена монотоност испољавати (гледано с лева на десно по  $X$ -оси) тако да ће за  $x < -\frac{b}{2a}$  функција расти  $f \nearrow$ , а за  $x > -\frac{b}{2a}$  функција ће опадати тј.  $f \searrow$ .
- **домен и кодомен функције;** (Домен функције  $f$  или област дефинисаности, јесте скуп вредности независно променљиве  $x$  за коју је функција  $f$  израчунљива, тј. чије су вредности  $f(x) \in \mathbb{R}$ ). Квадратна функција је израчунљива за све  $x \in \mathbb{R}$ , према томе, њен домен је скуп  $\mathbb{R}$ ; у ознаци  $D_f = \mathbb{R}$ . Кодомен или област вредности функције, можемо утврдити одмах по одређивању темена парабололе; тако да је  $K_f = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$ , ако је  $a > 0$ , односно,  $K_f = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$ , ако је  $a < 0$ .

**Пример 1:** Испитати функцију  $y = 2x^2 - 8x + 7$  и скицирати њен график.

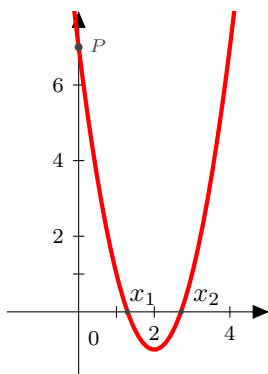
*решење:* Коефицијент уз  $x^2$  је  $a = 2$ , тј.  $a > 0$ , у том случају, параболола је са теменом облика  $\smile$ .

- **нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4}$   
 $\Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$x_1$  и  $x_2$  су пресечне тачке парабололе на  $X$ -оси, и можемо приметити да су веома блиске (разликују се за  $\sqrt{2}$ ). Одмах ћемо одредити и пресечну тачку парабололе са  $Y$ -осом.

$f(0) = 0 - 0 + 7 = 7$ . Параболола сече  $Y$ -осу у тачки  $P$  са координатама  $P = (0, 7)$ .

- **екстремне вредности функције** Пошто је  $a > 0$ , функција има минималну вредност за  $x = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ , и она износи  $y_{\min} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7 - (-8)^2}{4 \cdot 2} = \frac{56-64}{8} = -1$ ; могли смо израчунати и на следећи начин:  $y_{\min} = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = 8 - 16 + 7 = -1$ , што је често, једноставније. Дакле, теме парабололе је тачка  $T = (2, -1)$ . Сада можемо да скицирамо график функције (слика је на следећој страни).
- **знак функције;**  $y > 0$  за  $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ , док је  $y < 0$  за  $x \in (x_1, x_2)$ ; види слику.



- **монотоност функције**; (раст и опадање вредности функције)  
Посматрањем графика функције (с лева на десно по  $X$ -оси) закључујемо:  $f \searrow$  за  $x < 2$ , и  $f \nearrow$  за  $x > 2$ .
- **домен и кодомен функције**;  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $K_f = [-1, +\infty)$ .

**Пример 2:** Испитати функцију  $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$  и скицирати њен график.

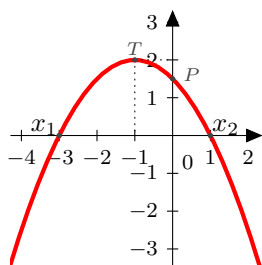
**решење:** Прво што ћемо уочити,  $a = -\frac{1}{2}$ , тј.  $a < 0$ , тада је параболо са теменом облика  $\frown$ .

- **нуле функције**:  $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \vee x-1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$ .

$x_1$  и  $x_2$  су пресечне тачке параболо на  $X$ -оси. Одмах ћемо одредити и пресечну тачку параболо са  $Y$ -осом.

$f(0) = -0 - 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ . Парабола сече  $Y$ -осу у тачки  $P$  са координатама  $P = (0, \frac{3}{2})$ .

- **екстремне вредности функције** Пошто је  $a < 0$ , функција има максималну вредност за  $x = -\frac{-1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -1$ , и она износи  $y_{\max} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{2} - (-1)^2}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-4}{-2} = 2$ ; могли смо израчунати и на следећи начин:  $y_{\max} = f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$ ; нешто једноставније. Дакле, теме параболо је тачка  $T = (-1, 2)$ . Сада можемо да скицирамо график функције.



- **знак функције**;  $y < 0$  за  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ , док је  $y > 0$  за  $x \in (-3, 1)$ ; види слику.
- **монотоност функције**; (раст и опадање вредности функције)  
Посматрањем графика функције (с лева на десно по  $X$ -оси) закључујемо:  $f \nearrow$  за  $x < -1$ , и  $f \searrow$  за  $x > -1$ .
- **домен и кодомен функције**;  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $K_f = (-\infty, 2]$ .

**Пример 3:** Испитати функцију  $y = 2x^2 - x + 1$  и скицирати њен график.

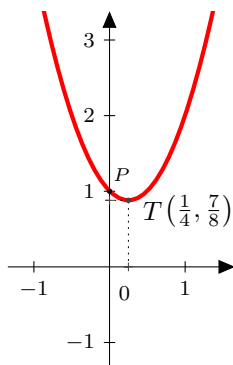
**решење:** Прво,  $a = 2$ , тј.  $a > 0$ , у том случају, параболо је са теменом облика  $\smile$ .

- **нуле функције**:  $y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{4}$   
 $\Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ .

$x_1$  и  $x_2$  нису нуле функције; график нема пресечне тачке са  $X$ -осом. Цела параболо је изнад  $X$ -осе. Одмах ћемо одредити и пресечну тачку параболо са  $Y$ -осом.

$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$ . Парабола сече  $Y$ -осу у тачки  $P$  са координатама  $P = (0, 1)$ .

- **екстремне вредности функције** Пошто је  $a > 0$ , функција има минималну вредност за  $x = -\frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ , и она износи  $y_{\min} = f(\frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{7}{8}$ . Дакле, теме параболо је тачка  $T = (\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$ . Сада можемо да скицирамо график функције (слика је на следећој страни).
- **знак функције**;  $y > 0$  за све  $x \in \mathbb{R}$ ; види слику.



- **монотоност функције;** (раст и опадање вредности функције)  
Посматрањем графика функције (с лева на десно по  $X$ -оси) закључујемо:  
 $f \searrow$  за  $x < \frac{1}{4}$ , и  $f \nearrow$  за  $x > \frac{1}{4}$ .
- **домен и кодомен функције;**  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $K_f = [\frac{7}{8}, +\infty)$ .

**Пример 4:** Испитати функцију  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$  и скицирати њен график.

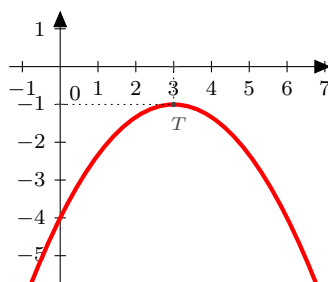
**решење:** Прво што ћемо уочити,  $a = -\frac{1}{3}$ , тј.  $a < 0$ , па је парабола са теменом облика  $\cap$ .

- **нуле функције:**  $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{6 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 3 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ .

$x_1$  и  $x_2$  нису нуле функције; график нема пресечне тачке са  $X$ -осом. Цела парабола је испод  $X$ -осе. Одмах ћемо одредити и пресечну тачку параболе са  $Y$ -осом.

$f(0) = -0 + 0 - 4 = -4$ . Парабола сече  $Y$ -осу у тачки  $P$  са координатама  $P = (0, -4)$ .

- **екстремне вредности функције** Пошто је  $a < 0$ , функција има максималну вредност за  $x = -\frac{2}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = 3$ , и она износи  $y_{\max} = f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 9 + 6 - 4 = -3 + 6 - 4 = -1$ . Дакле, теме параболе је тачка  $T = (3, -1)$ . Сада можемо да скицирамо график функције.



- **знак функције;**  $y < 0$  за све  $x \in \mathbb{R}$ ; види слику.
- **монотоност функције;** (раст и опадање вредности функције)  
Посматрањем графика функције (с лева на десно по  $X$ -оси) закључујемо:  $f \nearrow$  за  $x < 3$ , и  $f \searrow$  за  $x > 3$ .
- **домен и кодомен функције;**  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $K_f = (-\infty, -1]$ .

## Задаци

(249) У функцији  $f(x) = x^2 + bx + c$ , одредити коефицијенте  $b$  и  $c$  тако да она сече  $X$ -осу у тачкама  $A(2, 0)$  и  $B(-3, 0)$ .

(253) Одредити екстремне вредности функција:

а)  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ;

в)  $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$ ;

г)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$ .

**(252)** Скицирати графиче функција:

**а)**  $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ ;    **б)**  $y = -2(x - 1)^2$ ;    **в)**  $y = 2(x + 2)^2$ ;    **г)**  $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2$ .

(254) За коју вредност реалног параметра  $m$  функција  $y = x^2 - mx + m + 1$  има минимум једнак  $-2$ ?

(255) У квадратној функцији  $y = (m + 2)x^2 + (1 - m)x + m$  одреди реалан параметар  $m$  тако да функција има максимум за  $x = 2$ .

(256) У функцији  $y = x^2 - (k + 1)x + k - 2$  одреди реалан параметар  $k$  тако да функција има:  
а) минимум за  $x = 1$ ;      б) минимум једнак  $-2$ .

(257) Да ли функција  $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$  има екстремну вредност у интервалу  $(-1, 5)$ ?

(259) Дате су функције  $f_1(x) = x^2 - kx + k - 1$  и  $f_2(x) = x^2 - 2x + k$ . Одредити реалан параметар  $k$  тако да функције имају једнаке минимуме.

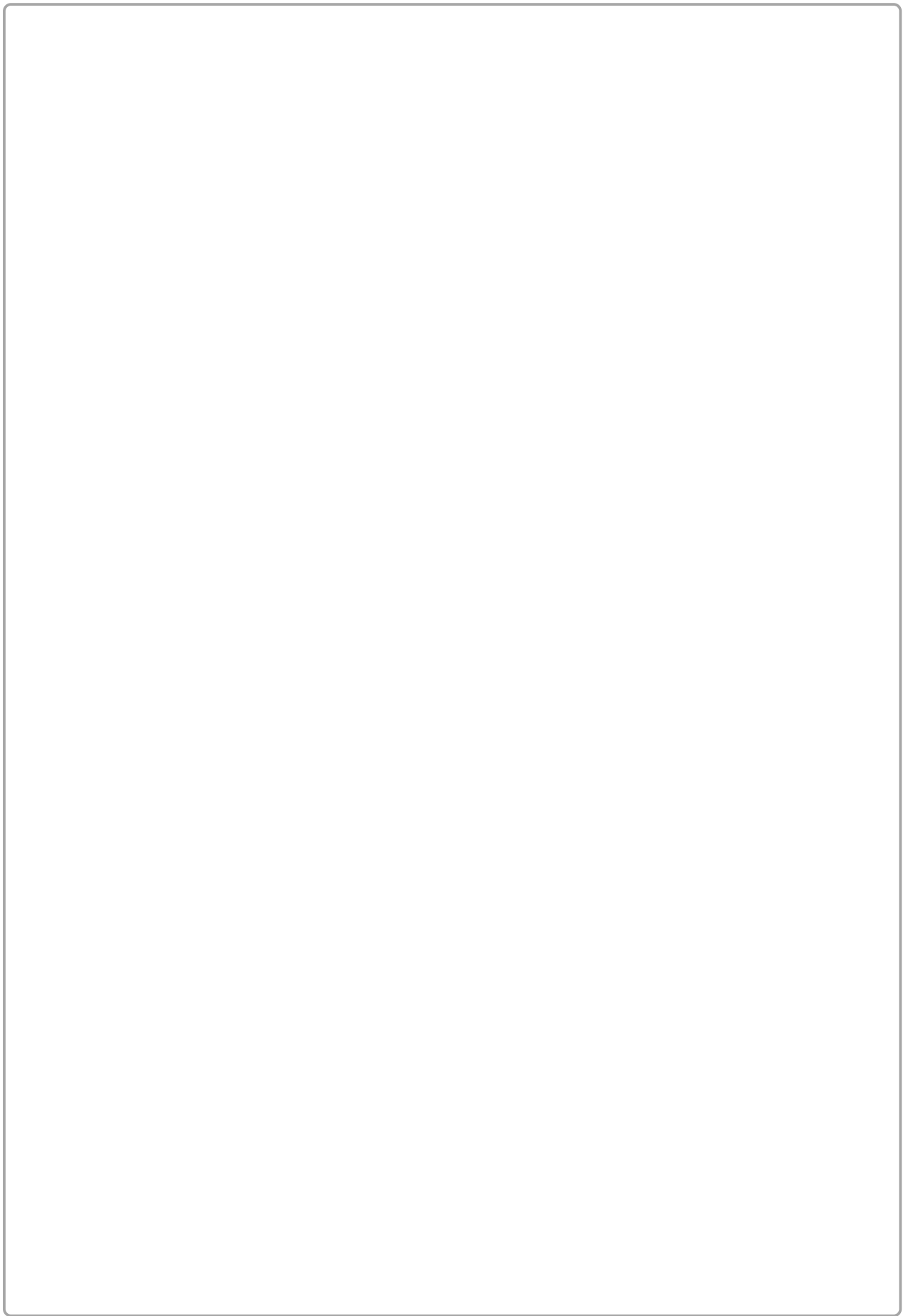
(260) За које вредности  $x$  функција  $f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$  има минимум?

(261) Дате функције свести на канонски облик, и скицирати њихове графике:

б)  $y = 2x^2 - 8x + 8$     в)  $y = -x^2 - 2x - 1$     д)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x$     ж)  $y = -2x^2 + 4x + 6$   
е)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$

(264) Скицирати график функције (и описати њене особине):

а)  $y = x^2 - |x|$     б)  $y = |x^2 + x|$     в)  $y = -|x^2 - 2x|$     г)  $y = (3 - x)|x + 1|$





(268) Одредити све реалне бројеве  $p$  за које је квадратна функција  $f(x) = (p^2 + 2p - 3)x^2 - 4px + p$  позитивна за све реалне вредности променљиве  $x$ .

(258) Одредити реалан број  $x$  тако да разлика тог броја и његовог квадрата буде највећа.

(282) Разложити број  $k$  на два сабирка, тако да њихов производ буде највећи.

(284) У квадрат странице  $a$  уписати квадрат најмање површине.

(436) У једнакокраки троугао основице  $a$  и висине  $h$  уписан је правоугаоник, тако да су му два темена на основици троугла, а друга два на крацима. Одредити висину правоугаоника тако да он има највећу површину.

(275) Доказати да су нуле функције  $f(x) = x^2 - px + q$  рационални бројеви ако је  $p = mq + \frac{1}{m}$ , где су  $m, q$  рационални параметри.

(274) Одредити цео број  $a$  тако да су нуле функције  $f(x) = (x - a)(x - 3) + 3$  такође цели бројеви.

(415) Дата је једначина  $2x^2 + mx + 4 = 0$ . Одредити реалан број  $m$  тако да функција  $y = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$  има најмању вредност. За које вредности  $m$  је  $y > 0$ ?