

(A)

- [20] Доказати да је за $abcd \neq 0$ пропорција $a : b = c : d$ еквивалентна једнакости $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ за $c + d \neq 0$.
- [20] Једна пумпа извучи за 6 минута 15 hl воде из дубине од 180m. За које време та иста пумпа може да извуче 20 hl воде из дубине 120m?
- [20] Износ од 1235 € треба поделити између особа A, B, C и D тако да се делови што их добијају C и A односе као 5 : 2, делови што их добијају B и D као 1 : 3, а делови које добијају A и D као 3 : 4. Колико свака особа добија новца?
- [20] Колика се сума мора уложити са каматном стопом од 25% да би после 10 година достигла износ од 5000 €? (заокружити на целобројну вредност).
- [20] Дат је скуп од n тачака, међу којима не постоје четири компланарне тачке. Колико тачака има овај скуп ако је број свих равни одређених овим тачкама 12 пута већи од највећег броја правих које могу бити одређене тим тачкама?

[0-39=1; 40-54=2; 55-69=3; 70-85=4; 86-100=5]

(B)

- [20] Који број треба додати обема члановима размере 5 : 37, да би она постала 1 : 3?
- [20] На једној деоници ауто-пута радило је 46 радника, 24 дана, по 6 часова дневно и изградили су пут дужине 27,6 km и ширине 14m. Колико радника треба да раде под истим условима да би изградили пут дужине 35 km, ширине 12 m, ако раде 30 дана по 8 часова дневно?
- [20] За израду накита користи се сребро финоће 600‰ и сребро 900‰ да би се добило сребро финоће 800‰.
 - У ком односу треба помешати ове две врсте сребра?
 - Колико треба грама од сваке врсте да би се добило 60g сребра финоће 800‰?
- [20] За колико процената се смањи време путовања на извесном путу ако се брзина повећа за једну четвртину?
- [20] Нека су a, b, c, d, e пет паралелних прави, међу којима никоје три не припадају једној равни. Колико равни одређују ове праве?.

[0-39=1; 40-54=2; 55-69=3; 70-85=4; 86-100=5]

(C)

- [20] Израчунати x, y и z ако је:
 $x : y : z = 1 : 4 : 3$ и $2x + 3y - z = 22$
- [20] Четири једнака трактора могу да поору неко земљиште за 36 часова. После 12 часова рада један трактор се покварио. За колико часова ће бити пооран остатак земљишта?
- [20] Радећи заједнички један посао четири радника зараде зависно од учинка први 12000 динара, други 11500 динара, трећи 10500 динара и четврти 9000 динара. Каснијим обрачуном испоставило се да за тај посао треба да приме још 21452 динара. По колико динара ће добити сваки од њих ако се подела изврши сразмерно њиховим зарадама? (износе заокружити на две децимале)
- [20] На једном градилишту број радника повећан је за трећину. За колико процената од предвиђеног времена ће се посао раније завршити?
- [20] Ако се једном многоуглу број страница повећа за 2, број његових дијагонала повећан је за 17. Колико страница има тај многоугао?

[0-39=1; 40-54=2; 55-69=3; 70-85=4; 86-100=5]

(D)

- [20] Из датих пропорција извести продужену пропорцију облика $a : b : c : d = \dots$ ако је: $a : b = 3 : 4$, $c : b = 5 : 6$ и $d : a = 7 : 6$.
- [20] По плану 30 радника треба да заврше посао за 42 дана ако раде по 8 часова дневно. Посао започну сви радници и раде 12 дана, тада 6 радника напусте посао, а радно време се повећа за 2 часа. После колико дана је завршен остатак посла?
- [20] Колико литара воде температуре 12° треба помешати са 5 l воде температуре 70° да би се добила мешавина температуре 37° ?
- [20] Предузеће је платило камату 17710 динара на позајмљена средства за време од 21. марта до 21. јуна по стопи 5,5%. Колико износе позајмљена средства?
- [20] На мимоилазним правим p и q дате су тачке $A, B, C \in p$ и $D, E \in q$. Колико равни одређују тачке A, B, C, D, E, F ако тачка F не припада ниједној од правих одређених тачкама A, B, C, D, E ?

[0-39=1; 40-54=2; 55-69=3; 70-85=4; 86-100=5]

[A1] Доказати да је за $abcd \neq 0$ пропорција $a : b = c : d$ еквивалентна једнакости $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ за $c + d \neq 0$.

решење: Из $abcd \neq 0$ следи $a, b, c, d \neq 0$. Претпоставимо да је $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} (= k)$. Тада је $a = kc$, $b = kd$. Сабирањем последњих двеју једнакости добијамо, $a + b = kc + kd = k(c + d)$, тј. $\frac{a+b}{c+d} = k$, $c + d \neq 0$ и одавде следи тврђење, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ за $c + d \neq 0$.

[A2] Једна пумпа извлачи за 6 минута 15 hl воде из дубине од 180m. За које време та иста пумпа може да извуче 20 hl воде из дубине 120m?

решење: У првом делу, одредимо за које време ће пумпа извући већу количину воде са исте дубине 180 m.

$$\begin{array}{ccc} 6 [min] & 180 [m] & 15 [hl] \\ \uparrow & & \uparrow \\ x & 180 & 20 \end{array}$$
 За већу количину воде, пумпи треба више времена, дакле, величине

су директно пропорционалне, па важи, $\frac{x}{6} = \frac{20}{15} \Leftrightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ мин.

$$\begin{array}{ccc} 8 [min] & 20 [hl] & 180 [m] \\ \uparrow & & \uparrow \\ x & 20 & 120 \end{array}$$
 Са друге стране, имамо тј. пумпи треба више времена да извуче воду

са веће дубине, опет су величине директно пропорционалне, $\frac{x}{8} = \frac{120}{180} \Leftrightarrow x = 8 \cdot \frac{2}{3} = 5 \text{ min } 20 \text{ sec}$.

[A3] Износ од 1235 € треба поделити између особа A, B, C и D тако да се делови што их добијају C и A односе као 5 : 2, делови што их добијају B и D као 1 : 3, а делови које добијају A и D као 3 : 4. Колико свака особа добија новца?

решење: Из $\frac{C}{A} = \frac{5}{2}$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{3}$ и $\frac{A}{D} = \frac{3}{4}$ имамо, $\frac{C}{A} = \frac{5}{2}$, $\frac{A}{D} = \frac{3}{4}$ и $\frac{D}{B} = \frac{3}{1}$, односно, $\frac{C}{A} = \frac{90}{36}$, $\frac{A}{D} = \frac{36}{48}$ и $\frac{D}{B} = \frac{48}{16}$. Дакле, у питању је продужена пропорција облика $C : A : D : B = 90 : 36 : 48 : 16$. Одавде следи $C = 90k$, $A = 36k$, $D = 48k$ и $B = 16k$, (k је коефицијент пропорционалности). Сабирањем ових једнакости добијамо, $A + B + C + D = 190k$. Пошто се дели износ од 1235 €, биће $190k = 1235$, тј. $k = 6,5$ тако да су њихови делови:

$A = 36 \cdot 6,5 = 234 \text{ €}$, $B = 16 \cdot 6,5 = 104 \text{ €}$, $C = 90 \cdot 6,5 = 585 \text{ €}$, $D = 48 \cdot 6,5 = 312 \text{ €}$.

[A4] Колика се сума мора уложити са каматном стопом од 25% да би после 10 година достигла износ од 5000 €? (заокружити на целобројну вредност).

решење: Означимо са $p = 25\%$, $n = 10$ година, $G_{10} = 5000$ и $G_1 = ?$ количину уложене вредности на почетку, тада је према формули за сложени каматни рачун: $G_{10} = G_1(1 + \frac{p}{100})^{10}$, тј. $5000 = G_1(1 + \frac{25}{100})^{10} \Leftrightarrow 5000 = G_1(1 + \frac{1}{4})^{10} \Leftrightarrow 5000 = G_1(\frac{5}{4})^{10} \Leftrightarrow G_1 = 5000 \cdot (\frac{4}{5})^{10} \Leftrightarrow G_1 = 5000 \cdot 0,8^{10} \Leftrightarrow G_1 = 5000 \cdot 0,1073741824 \Leftrightarrow G_1 = 537 \text{ €}$. Почетни улог, пре 10 година, износио је 537 €.

[A5] Дат је скуп од n тачака, међу којима не постоје четири компланарне тачке. Колико тачака има овај скуп ако је број свих равни одређених овим тачкама 12 пута већи од највећег броја правих које могу бити одређене тим тачкама?

решење: Према једној од аксиома припадања, једна раван одређена је са најмање три неколинеарне тачке, тако да ћемо њихов највећи број, од n тачака одредити на следећи начин:

- догађај: формирање равни од n расположивих тачака

- реализација догађаја: За избор прве тачке имамо их n на располагању, за избор друге $n - 1$ тачку, и за избор треће имамо $n - 2$ тачке. Према принципу производа (пошто смо избор вршили сукцесивно) добили смо укупан број уређених тројки (облика (A, B, C)) који износи $n(n - 1)(n - 2)$. С обзиром да нам треба број трочланих скупова (облика $\{A, B, C\}$), а не тројки, тај производ делимо са бројем премештања слова унутар уређене тројке. За три слова, A, B, C , тај број премештања једнак је $3 \cdot 2 = 6$, па је укупан број равни сачињених од три неколинеарне тачке једнак $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Са друге стране, такође, према једној од аксиома припадања, за одређивање једне праве потребне су нам, најмање две разне тачке. На сличан начин утврђујемо да је број правих одређен овим тачкама, једнак $\frac{n(n-1)}{2}$. Према услову задатка, број равни одређених овим тачкама 12 пута је већи од броја правих које могу бити одређене тим тачкама:

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 12 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, односно, $\frac{n-2}{6} = 6 \Leftrightarrow n - 2 = 36 \Leftrightarrow n = 38$ тачака.

[B1] Који број треба додати обема члановима размере $5 : 37$, да би она постала $1 : 3$?

решење: Тај број је x .

$$(5 + x) : (37 + x) = 1 : 3 \Leftrightarrow 3(5 + x) = 37 + x \Leftrightarrow 15 + 3x = 37 + x \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11.$$

Провера: $\frac{5+11}{37+11} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$.

[B2] На једној деоници ауто-пута радило је 46 радника, 24 дана, по 6 часова дневно и изградили су пут дужине 27,6 km и ширине 14m. Колико радника треба да раде под истим условима да би изградили пут дужине 35 km, ширине 12 m, ако раде 30 дана по 8 часова дневно?

решење:

46 [rad]	24 [dan]	6 [h]	27,6 [km]	14 [m]
↑			↑	
x	30	8	35	12

Ако побољшавамо услове рада (у смислу повећања броја радника, броја дана, радног времена), онда ће се остварити и бољи резултати. Дакле, ове две групе величина су директно пропорционалне, па важи $\frac{x}{46} \cdot \frac{30}{24} \cdot \frac{8}{6} = \frac{35}{27,6} \cdot \frac{12}{14} \Leftrightarrow \frac{5x}{46 \cdot 3} = \frac{35}{27,6} \cdot \frac{6}{7} \Leftrightarrow x = \frac{46 \cdot 3 \cdot 6}{27,6} \Leftrightarrow x = \frac{460 \cdot 6}{9,2} = \frac{460 \cdot 3}{4,6} \Leftrightarrow x = 30$ радника.

[B3] За израду накита користи се сребро финоће 600‰ и сребро 900‰ да би се добило сребро финоће 800‰.

а) У ком односу треба помешати ове две врсте сребра?

б) Колико треба грама од сваке врсте да би се добило 60g сребра финоће 800‰?

решење:

Задатак ћемо решити помоћу рачуна мешања: Обележимо са x количину сребра од 600‰, а са y количину сребра од 900‰

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{array}{l} x \quad 600 \searrow \\ y \quad 900 \nearrow \end{array} \begin{array}{l} 800 \nearrow \\ 800 \searrow \end{array} \begin{array}{l} 900 - 800 = 100 \\ 800 - 600 = 200 \end{array} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{100}{200} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

б) Према рачуну мешања: $600x + 900y = 800 \cdot 60 \Leftrightarrow 2x + 3y = 160$, и из а) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2x$, добијамо, $2x + 6x = 160 \Leftrightarrow 8x = 160 \Leftrightarrow x = 20$ g и $y = 40$ g.

[B4] За колико процената се смањи време путовања на извесном путу ако се брзина повећа за једну четвртину?

решење:

Познато нам је да је $t = \frac{S}{V}$, где је S - пут, V - брзина кретања и t - време за које је пређен пут S при брзини V . Ако се брзина повећа за $\frac{1}{4}V$, онда је то нова брзина $V_1 = V + \frac{1}{4}V = \frac{5}{4}V$. Тада је ново време $t_1 = \frac{S}{V_1} = \frac{S}{\frac{5}{4}V} = \frac{4}{5} \frac{S}{V} = \frac{4}{5}t$, што значи да је време смањено за $t - \frac{4}{5}t = \frac{1}{5}t = 20\% t$.

[B5] Нека су a, b, c, d, e пет паралелних прави, међу којима никоје три не припадају једној равни. Колико равни одређују ове праве?

решење:

Познато нам је да су од паралелних правих a, b, c, d, e довољне две да се одреди једна раван. За реализацију догађаја (формирање равни од пара паралелних правих), за избор прве праве имамо на располагању 5 правих, а за избор друге праве 4 праве. Према принципу производа таквих уређених парова има $5 \cdot 4$; али, пошто је раван одређена паралелним правима (a, b) , иста раван одређена паралелним правима (b, a) , онда овај производ делимо са 2, тако да је број равни једнак $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ равни.

[C1] Израчунати x, y и z ако је: $x : y : z = 1 : 4 : 3$ и $2x + 3y - z = 22$?

решење:

Из продужене пропорције $x : y : z = 1 : 4 : 3$ следи, $x = k, y = 4k$ и $z = 3k$, где је $k \neq 0$ коефицијент пропорционалности. Заменом у другу једнакост добијамо, $2x + 3y - z = 2k + 12k - 3k = 22 \Leftrightarrow 11k = 22 \Leftrightarrow k = 2$, што значи да је, $x = 2, y = 8$ и $z = 6$.

[C2] Четири једнака трактора могу да поору неко земљиште за 36 часова. После 12 часова рада један трактор се покварио. За колико часова ће бити пооран остатак земљишта?

решење:

По плану, 4 трактора би поорала целу њиву за 36 часова. Почели су да ору, радили су 12 часова, и тада се покварио један трактор. Да се трактор није покварио, тада би им престало: $36-12=24$ часа до краја.

Дакле, располажемо са следећим подацима:

$$\begin{array}{c} \downarrow 4[t] \quad \uparrow 24[h] \quad \text{'до краја, под непромењеним условима'} \\ \downarrow 3 \quad \uparrow x \quad \text{'до краја, са једним трактором мање'} \end{array}$$

Величине су обрнуто пропорционалне, па је $x : 24 = 4 : 3 \Leftrightarrow x = \frac{24 \cdot 4}{3} = 32$ часа.

[C3] Радећи заједнички један посао четири радника зараде зависно од учинка први 12000 динара, други 11500 динара, трећи 10500 динара и четврти 9000 динара. Каснијим обрачуном испоставило се да за тај посао треба да приме још 21452 динара. По колико динара ће добити сваки од њих ако се подела изврши сразмерно њиховим зарадама? (износе заокружити на две децимале) .

решење:

Обележимо са $A = 12000$ зараду првог радника, $B = 11500$ зараду другог радника, $C = 10500$ зараду трећег радника и $D = 9000$ зараду четвртог радника. Просек зараде првог радника A_1 ћемо добити из израза $A_1 = \frac{A}{A+B+C+D}$, другог радника $B_1 = \frac{B}{A+B+C+D}$, трећег радника $C_1 = \frac{C}{A+B+C+D}$ и четвртог радника $D_1 = \frac{D}{A+B+C+D}$, тако да је $A_1 = \frac{12000}{43000} = \frac{12}{43}$, $B_1 = \frac{11500}{43000} = \frac{23}{86}$, $C_1 = \frac{10500}{43000} = \frac{21}{86}$, $D_1 = \frac{9000}{43000} = \frac{9}{43}$. Множењем просека зараде са вишком у износу од 21452 добићемо појединачне износе поделе вишка; $A_2 = 21452 \cdot A_1 = 5986,60 \text{ din}$, $B_2 = 21452 \cdot B_1 = 5737,16 \text{ din}$, $C_2 = 21452 \cdot C_1 = 5238,28 \text{ din}$ и $D_2 = 21452 \cdot D_1 = 4489,95 \text{ din}$.

[C4] На једном градилишту број радника повећан је за трећину. За колико процената од предвиђеног времена ће се посао раније завршити?

решење:

Обележимо са R број радника, и нека је t време које је потребно за извршење тог посла, тада је

$$\begin{array}{c} R \quad \quad t \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \\ R + \frac{1}{3}R \quad \quad t_1 \end{array}$$
 при чему је t_1 време потребно за извршење тог посла при повећању броја радника.

Одатле је $\frac{t_1}{t} = \frac{R}{R + \frac{1}{3}R} = \frac{R}{\frac{4}{3}R} = \frac{3}{4}$, тј. $t_1 = \frac{3}{4}t$. Разлика $\Delta t = t - t_1 = t - \frac{3}{4}t = \frac{1}{4}t = 25\% t$. Дакле, при повећању броја радника за трећину време потребно за извршење тог посла ће се смањити за 25%.

[C5] Ако се једном многоуглу број страница повећа за 2, број његових дијагонала повећан је за 17. Колико страница има тај многоугао?

решење:

За многоугао од n страница број његових дијагонала једнак је $\frac{n(n-3)}{2}$. Ако ту вредност увећамо за 17, добијамо многоугао који има две странице више, тј. $\frac{n(n-3)}{2} + 17 = \frac{(n+2)(n+2-3)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n-3)+34}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 3n + 34 = n^2 + n - 2 \Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$. Дакле, у питању је многоугао који има 9 страница.

[D1] Из датих пропорција извести продужену пропорцију облика $a : b : c : d = \dots$ ако је: $a : b = 3 : 4$, $c : b = 5 : 6$ и $d : a = 7 : 6$.

решење:

Из пропорција: $a : b = 3 : 4$, $c : b = 5 : 6$ и $d : a = 7 : 6$, које ћемо ради прегледности написати у облику разломака,

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $\frac{c}{b} = \frac{5}{6}$, $\frac{d}{a} = \frac{7}{6}$ извршимо најпре регруписавање пропорција (тако да остваримо уланчавање величина); на следећи начин:

$\frac{d}{a} = \frac{7}{6}$, $\nearrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $\nearrow \frac{b}{c} = \frac{6}{5}$ (одредимо $NZS(4, 6)$ у другој и трећој пропорцији; то је 12). После проширивања $\frac{d}{a} = \frac{7}{6}$, $\frac{a}{b} = \frac{9}{12}$, $\frac{b}{c} = \frac{12}{10}$ (а затим, одредимо $NZS(6, 9)$ у првој и другој пропорцији; то је 18) биће:

$\frac{d}{a} = \frac{21}{18}$, $\frac{a}{b} = \frac{18}{24}$, $\frac{b}{c} = \frac{24}{20}$ (проширивши последњи разломак) добили смо уланчану форму. Одавде је, $d : a : b : c = 21 : 18 : 24 : 20$, што је еквивалентно, $a : b : c : d = 18 : 24 : 20 : 21$.

[D2] По плану 30 радника треба да заврше посао за 42 дана ако раде по 8 часова дневно. Посао започну сви радници и раде 12 дана, тада 6 радника напусте посао, а радно време се повећа за 2 часа. После колико дана је завршен остатак посла?

решење:

По плану, 30 радника за 42 дана по 8 часова дневно; ураде цео посао. Овако раде 12 дана. Под непромењеним условима за остатак посла 30 радника требају још 30 дана по 8 часова дневно, али 6 радника напусте посао, и радно време се повећа за 2 часа, тако да ћемо имати следећи преглед података:

30 [rad]	30 [dana]	8 [h]	
↓	↑	↓	
24	x	10	

Одавде је, $\frac{x}{30} = \frac{30}{24} \cdot \frac{8}{10} = 1$, односно, $x = 30$ дана (за завршавање посла).

[D3] Колико литара воде температуре 12° треба помешати са 5 l воде температуре 70° да би се добила мешавина температуре 37° ?

решење:

Према рачуну мешања, имамо следећи преглед података:

x	12	
5	70	Биће, $12x + 5 \cdot 70 = (x + 5) \cdot 37 \Leftrightarrow 12x + 350 = 37x + 185 \Leftrightarrow 25x = 165 \Leftrightarrow x = \frac{165}{25} \Leftrightarrow x = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}$.
x + 5	37	

Дакле, воде са температуром 12° треба $6\frac{3}{5}$ [l].

[D4] Предузеће је платило камату 17710 динара на позајмљена средства за време од 21. марта до 21. јуна по стопи 5,5%. Колико износе позајмљена средства?

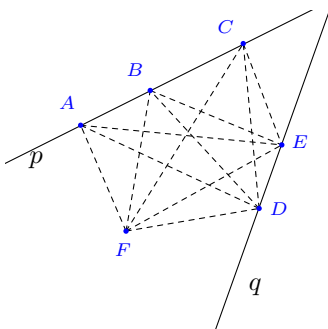
решење:

Период од 21.марта до 21.јуна износи укупно 92 дана, тако да ћемо преко формуле за прост каматни рачун израчунати количину позајмице:

$I = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500}$; $17710 = \frac{G \cdot 5,5 \cdot 92}{36500} \Leftrightarrow G = \frac{17710 \cdot 36500}{5,5 \cdot 92} = \frac{646415000}{506} = 1277500$ динара.

[D5] На мимоилазним правим p и q дате су тачке $A, B, C \in p$ и $D, E \in q$. Колико равни одређују тачке A, B, C, D, E, F ако тачка F не припада ниједној од правих одређених тачкама A, B, C, D, E ?

решење:



први начин: Претпоставимо да су све дате тачке у тројкама неколинеарне, тада је број могућих равни одређен тројком тачака једнак $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$. Од ове вредности одузмемо број оних равни које су формиране од једне праве и једне тачке ван ње. Таквих укупно има $1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 7$, тако да је број могућих равни једнак $20 - 7 = 13$ равни.

други начин: Број равни одређених правом и тачком ван праве је једнак: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 4$, а број равни одређен са по једном тачком на свакој правој и трећом заједничком тачком F једнак је, према принципу производа $3 \cdot 2 = 6$ тако да је укупан број равни једнак збиру $7 + 6 = 13$ равни.